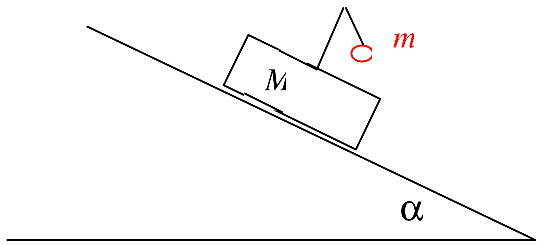
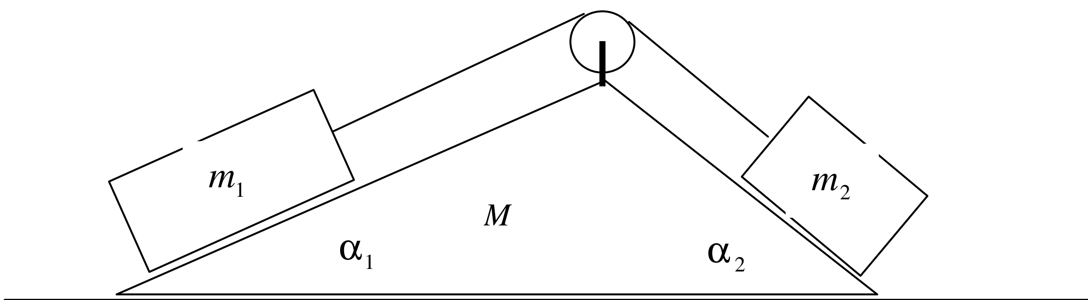
Seria 2

Zadanie 1. Na poziomym pręcie, wirującym wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω, nawleczony jest „koralik” o masie *m*. Miedzy koralikiem a osią obrotu jest sprężyna o długości *l* i współczynniku sprężystości *k*. Oblicz okres ewentualnych małych drgań koralika. Czy zadanie ma rozwiązanie przy wartościach parametrów?

Zadanie 2 Oblicz okres małych drgań wahadełka zamocowanego na wózku zsuwającym się z (nieruchomej) równi pochyłej o kącie nachylenia α. Masa wózka *M*, wahadełka *m*, długość nitki *l*, przyspieszenie ziemskie *g*.



Zadanie3 Wyznacz przyspieszenie trójkątnego klocka, mogącego sunąć bez tarcia po poziomym stole, jeśli na jego pozostałych dwóch bokach ślizgają się dwa klocki o masach m_1 i m_2, połączone nierozciągliwą nitką przewleczoną przez bloczek o momencie bezwładności *B*. Bloczek wraz z trójkątnym klockiem mają masę *M*.



Zadanie 4 Sprawdzić, że dwa lagranżiany:

$$L(q,\dot{q},t)\ \text{oraz}\ L(q,\dot{q},t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)=L(q,\dot{q},t)+\sum\frac{\partial f(q,t)}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$$

dają te same równania ruchu dla **dowolnej** funkcji f współrzędnych uogólnionych i czasu..

Zadanie 5

W polu Schwarzschilda ruch ciała opisany jest działaniem:

$$-mc^2\int\sqrt{g_{00}\mathrm{d}t^2-\frac{1}{c^2}\left(g_{rr}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2\right)}\ ,$$

gdzie $g_{00}=\frac{1}{g_{rr}}=1-\frac{r}{r_0}$, a $r_0=\frac{2GM}{c^2}$

Przekształć całkę działania na całkę po czasie „współrzędnościowym” t. Znajdź całkę energii.

Uwzględniając, że fizyczna odległość wynosi $ds=\sqrt{g_{rr}dr^2+r^2d\varphi^2}$, a fizyczny czas $d\tau=\sqrt{g_{00}}dt$, a zatem, że fizyczna prędkość wynosi $v=\frac{ds}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{g_{rr}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}$, wyraź stałą całkę energii przez znaną ze szczególnej teorii względności sumę energii spoczynkowej i kinetycznej. $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Czy wielkość ta jest stała? Jaki przybliżenia należy zastosować, by zmiany tej energii sprowadziły się do zmiany pewnej funkcji położenia identyfikowalnej z klasycznym potencjałem grawitacyjnym?

Zadanie 6 Relatywistyczne działanie cząstki swobodnej, ale **opisywanej** przez przyspieszonych obserwatorów, których przyspieszenia (w kowędrującym układzie odniesienia) są stałe, ale różne u różnych obserwatorów w zależności od położenia z zajmowanego w chwili równoczesnego startu: $a = c^2/z$, wynosi:

$$S=-mc^2\int\sqrt{\frac{z^2}{z_0{}^2}dt^2-\frac{1}{c^2}(dz^2+dx^2)}$$

Znajdź całki pierwsze wynikające z niezależności lagranżianu od czasu i od współrzędnej x. Eliminując czas znajdź równanie różniczkowe na zależność pomiędzy z i x, czyli na obserwowany tor cząstki. W rozwiązaniu przejdź z masą m do zera.